Pisagor'un Adalet Kupası

O. Yilmaz ve Ç. Misli, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fizik Bölümü

Pisagor'un en önemli buluşlarından bir tanesi de Adalet Kupası'dır. Bu kupa, görünüşte tıpkı diğer kupalara benzemektedir. Onu diğer kupalardan ayıran özellik ise kupanın ortasında yer alan bir kolon ve bu kolonda bulunan bir kanaldır. Su, bu kolonun seviyesinin altına kadar doldurulduğunda diğer normal kupalarda olduğu gibi durmaktadır (Şekil 1). Fakat su bu kolonun seviyesini geçerse ortadaki kolon ve içindeki kanal da su ile dolar ve ardından sifon (siphon) etkisi devreye girer. Böylece kupanın içinde bulunan suyun tamamı dökülmüş olur (Şekil 2). Pisagor'un Adalet Kupası bu özelliği ile sanki teknik araştırmalar sonunda üretilen gizemli bir eşya gibi görünmektedir. Sahip olduğu giz ise Pisagorcu okulun inanç felsefesini destekler niteliktedir.

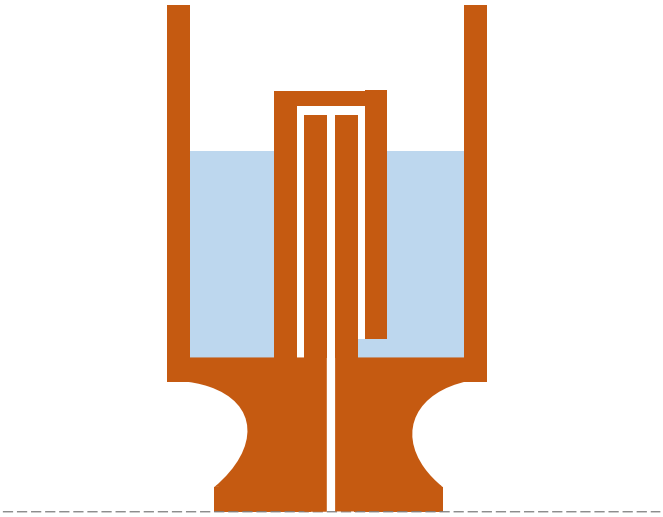
1. Giriş

Eski Yunan filozoflarından Pisagor (M.Ö. 570-495), Güney İtalya'nın Croton şehrinde dini ve mistik özelliklere sahip bilimsel bir topluluk kurmuştur. Bu topluluk tarafından üretilen bilgilerin gizli tutulması esastı ve söz konusu bilgiler dışarıdan kimseyle paylaşılmıyordu. "Bir üçgenin iç açılarının toplamı iki dik açıya eşittir" ve "Bir dik üçgende en uzun kenarın karesi, diğer dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamına eşittir" teoremleri ile tanınan büyük düşünür Pisagor, aynı zamanda bir telin titreşim kipleri üzerinde çalışarak müziğin fiziğinde kendi adı ile bilinen Pisagor Skalası'nı (Pythagorean Scale) keşfetmiştir [1]. Ayrıca Yer'in yuvarlak olduğunu ilk defa iddia edenlerden biridir. Matematik, müzik, geometri ve astronominin gelişmesinde çok önemli katkıları olan Pisagor ve öğrencileri, evrende geometrik ve harmonik bir uyum olduğuna, doğal sayıların evreni yönettiğine ve sayıların geometrik bir anlamı olduğuna inanıyorlardı. $\sqrt{2}$ gibi irrasyonel sayılar, sayısal inanç sistemine uymayınca bunu aralarında sır olarak sakladılar.

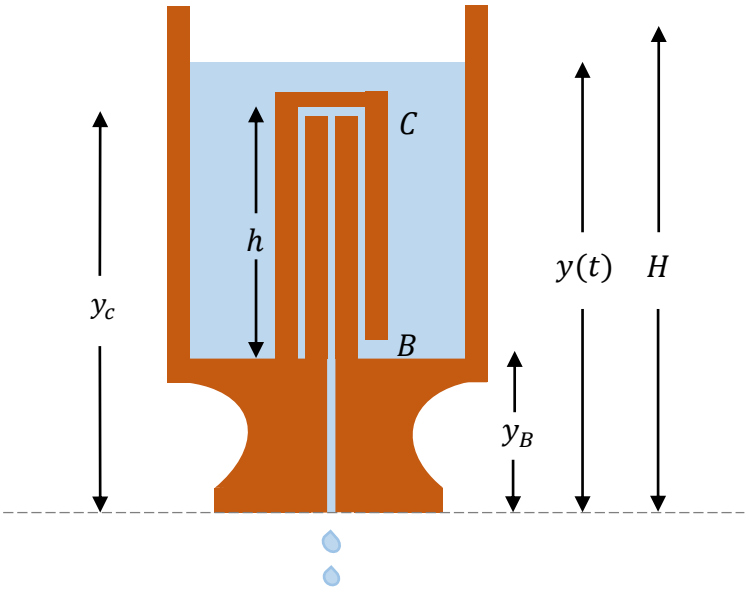
Pisagor'un en önemli buluşlarından bir tanesi de Adalet Kupası'dır. Bu kupa, görünüşte tıpkı diğer kupalara benzemektedir. Onu diğer kupalardan ayıran özellik ise kupanın ortasında yer alan bir kolon ve bu kolonda bulunan bir kanaldır. Su, bu kolonun yükseklik seviyesinin altına kadar doldurulduğunda, diğer normal kupalarda olduğu gibi durmaktadır (Şekil 1). Fakat su bu kolonun yükseklik seviyesini geçerse ortadaki kolon ve içindeki kanal da su ile dolar ve ardından sifon (siphon) etkisi devreye girer. Böylece kupanın içinde bulunan suyun tamamı dökülmüş olur (Şekil 2). Pisagor'un Adalet Kupası bu özelliği ile sanki teknik araştırmalar sonunda üretilen gizemli bir eşya gibi görünmektedir. Sahip olduğu giz ise, Pisagorcu okulun inanç felsefesini destekler niteliktedir.

Yunanca bir kelime olan *siphon* hem fiil hem isim olarak kullanılır ve genel olarak "çekmek" ve "sıvı akış borusu" anlamına gelir. İngilizcede de *sip* kelimesinden türeyen *siphon* "çekmek, yudumlamak" anlamında kullanılmaktadır. Ayrıca bir varilden şarap çekmek için

kullanılan, tüp ya da boru anlamı da bulunmaktadır. İnsanların sifonu ilk ne zaman kullandıkları hakkında kesin bilgiler bulunmamakla birlikte, M.Ö. 1450 yılına ait bir Mısır mezarında sifonu gösteren şekiller vardır [2], [3]. Hava ve atmosfer çok eskiden beri insanların ilgisini çekmiş, hava, boşluk, su ve denge ilkesine dayanılarak olağanüstü mekanik araçlar yapılmıştır. Özellikle büyük düşünür Arşimet ve İskenderiye Mekanik Okulundan Ctesibios, Philon ve Heron'un bu konuya önemli katkıları olmuştur [2], [3]. Daha sonra Leonardo da Vinci, Galileo ve öğrencisi Toricelli, Blaise Pascal, Newton, Daniel Bernoulli ve Euler gibi isimlerin de hidrodinamik konusunda önemli çalışmaları vardır [4].



Şekil 1. Kupanın içinde bulunan durgun su



Şekil 2. Kupanın ortasındaki kanala suyun dolması ve altındaki delikten çıkışı

2. Çalışma İlkesi ve Bernoulli Denklemi

Pisagor'un Adalet Kupası'nın çalışma ilkesi sifon mekanizmasına dayanır ve akışkanlar teorisi ile bu çalışma ilkesi kolaylıkla açıklanabilir. Kütlenin korunumu yasası

$$\frac{dM}{dt} + \int \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{a} = 0 \tag{1}$$

ile verilir. Burada M akışkanın kütlesi, $\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}$ akım yoğunluk vektörü, $\boldsymbol{v}$ akışkanın hızı ve ρ akışkanın yoğunluğudur. Sistemde akışkanın toplam kütlesi zamanla değişmediği için (1)'deki ilk terim sıfırdır ve buradan süreklilik denklemi

$$\rho \pi r^2 v_r = \rho \pi R^2 v_R \tag{2}$$

elde edilir. Burada akışkanın geçtiği yüzey yarıçapları r ve R ve bu yüzeydeki hızları da v_r ve v_R'dir. Akışkanlar için birim hacimdeki enerjinin korunumu yasası da

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{sabit} \tag{3}$$

Bernoulli denklemi ile verilir [4], [5]. R yarıçaplı kupanın içindeki su yüzeyinde ve kupanın altında bulunan r yarıçaplı delik için, Bernoulli denklemi uygulandığında ve bu seviyelerde açık hava basıncının ($P_{\text{atm}} = 10^5$ Pa) olduğuna dikkat edilerek suyun kupanın altındaki delikten çıkış hızı

$$v_r^2 = 2gy(t) + v_R^2 \tag{4}$$

bulunur (Şekil 2). Burada kupanın altındaki delik seviyesi sıfır referans noktası seçilmiştir ve $y(t)$ kupanın içindeki su seviyesinin yüksekliğini göstermektedir. (4) ile verilen ifade yerçekimi etkisi ile belli bir yükseklikten yere düşen parçacığın hızı ile aynıdır çünkü her ikisi de enerjinin korunumundan türetilmiştir. Böylece (2) ve (4)'den suyun delikten çıkış hızı

$$v_r = \sqrt{2gy}\,\frac{1}{\sqrt{1 - r^4/R^4}} \tag{5}$$

ve kupadaki su seviyesinin azalma hızı

$$v_R = \sqrt{2gy}\,\frac{r^2/R^2}{\sqrt{1 - r^4/R^4}} \tag{6}$$

hesaplanabilir. (6)'daki yarıçaplar arasındaki oran yeni bir sabit olmak üzere

$$K = \frac{r^2/R^2}{\sqrt{1 - r^4/R^4}} \tag{7}$$

ve dolayısı ile

$$\frac{K}{\sqrt{1 + K^2}} = \frac{r^2}{R^2} \tag{8}$$

tanımlanırsa (6) ile verilen ifade kısaca

$$v_R = -\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy}\,K \tag{9}$$

gibi ve (5) ile verilen ifade de

$$v_r = \sqrt{2gy}\,\sqrt{1 + K^2} \tag{10}$$

gibi yazılabilir. (9)'daki eksi işareti önemlidir ve su seviyesinin zamanla azaldığını göstermektedir. Ayrıca (9) diferansiyel denkleminden, yani

$$\frac{dy}{\sqrt{2gy}} = -Kdt \tag{11}$$

denkleminin, $t = 0$'da $y(0) = H$ sınır koşulunda, her iki tarafın integrali alındığında

$$\sqrt{2gy} = -gKt + \sqrt{2gH} \tag{12}$$

bulunur veya bu ifade

$$y = \frac{1}{2}gK^2t^2 - K\sqrt{2gH}t + H \tag{13}$$

gibi de yazılabilir. Böylece (12) veya (13)'den $y = 0$ seviyesine karşı gelen suyun boşalma süresi

$$t_b = \sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1}{K} \tag{14}$$

elde edilmiş olur.

Bir t anında kupanın içindeki suyun kütle miktarı

$$M(t) = \rho\pi R^2 y(t) \tag{15}$$

ile ve zamanla değişimi de

$$\frac{dM}{dt} = -\rho\pi R^2 v_R \tag{16}$$

ile verilir. Burada (9)'daki hızın değeri (16)'da yerine yazılırsa

$$\frac{dM}{dt} = -\rho\pi R^2\sqrt{2gy}\,K \tag{17}$$

bulunur. Daha sonra (12)'deki ifade (17)'de yerine yazılarak, kupadan boşalan suyun kütlesindeki zamanla değişim

$$\frac{dM}{dt} = -\rho\pi R^2\left(-gKt + \sqrt{2gH}\right)K \tag{18}$$

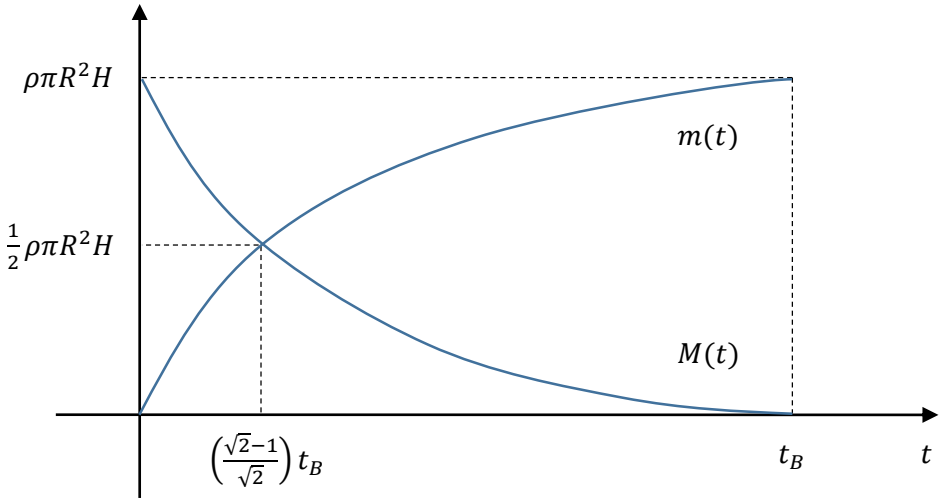
ve buradan her iki tarafın zaman üzerinden integrali alındığında

$$M(t) = -\rho\pi R^2\left(-\frac{1}{2}gKt^2 + \sqrt{2gH}t\right)K + \rho\pi R^2 H \tag{19}$$

boşalan suyun kütlesi zamanın bir fonksiyonu olarak bulunur (Şekil 3). (14)'teki t_b'nin değeri (19)'da yerine yazıldığında

$$M(t_b) = 0 \tag{20}$$

bulunur ve beklendiği gibi kupanın içinde bulunan suyun tamamı boşalmış olur.



Şekil 3. Kupadan boşalan suyun zamanla değişimi

Bu problemde iyi bir yaklaşımla $r/R \ll 1$ ve dolayısı ile $K \ll 1$ alınabilir. Bu nedenle (9)'daki hız da $v_R \ll 1$'dir. Kupanın iç tabanındaki delik B seviyesi, sıfır referans noktası seçilir ve B noktası ile su yüzeyine yine (3) numaralı Bernoulli denklemi uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\rho v_B \approx P_B(s) - P_B \tag{21}$$

elde edilir. Burada

$$P_B(s) = \rho g y(t) + P_{\text{atm}} \tag{22}$$

statik basınç olarak tanımlanır. Böylece (21)'den bu basınç farkı ile su moleküllerinin nasıl kinetik enerjiye sahip olduğunu ve B noktasındaki delikten içeri itilip yukarıya çıktığını görmüş oluruz. Ayrıca (21) ve (22)'den su zamanla azaldıkça basınç farkının ve kinetik enerjinin de azaldığını açıkça görmekteyiz. Su tamamen boşaldığında basınç farkı sıfır olur.

3. Sonuç

Pisagor'un Adalet Kupası'nın çalışma ilkesi sifon mekanizmasına dayanır. Bu şekilde sifon mekanizmasını yerine getiren ne kadar büyüklükte bir Pisagor Kupası yapılabilir? Kupanın ortasındaki kolonun en tepesi C ile en alt ucundaki B'deki deliğe (3)'deki Bernoulli denklemi uygulandığında

$$P = P_{\text{atm}} - \rho g h \tag{23}$$

elde edilir (Şekil 2). Burada, h ortadaki kolonun yüksekliği ve P de kolonun tepesindeki delik üzerindeki basınçtır. Bu basıncın en küçük değeri $P \approx 0$ seçilerek

$$h_{\text{max}} \approx \frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} \tag{24}$$

bulunur. Bu formülde $P_{\text{atm}} = 10^5$ Pa, $\rho_{\text{su}} = 10^3$ kg/m^3 ve $g = 10\, m/s^2$ değerleri yerine yazıldığında $h_{\text{max}} \approx 10$ m bulunur. Bu nedenle yapılacak olan kupanın ortasındaki kolonun yüksekliği en fazla 10 metre olabilir.

Ayrıca, dt zaman aralığında dışarıda biriken suyun kütle miktarı $dm = \rho\pi r^2 v_r dt$' dir. Buradan benzer işlemler tekrarlandığında

$$m(t) = -\rho\pi r^2 \left(\frac{1}{2} g K t^2 - \sqrt{2gH}\, t\right)\sqrt{1+K^2} \tag{25}$$

hesaplanabilir ve kütle korunacağı için $m(t) + M(t) = \rho\pi R^2 H$ her zaman sağlanır (Şekil 3).

Eğer kupaya kritik seviyenin altında kalacak şekilde sudan daha yoğun başka bir sıvı koysaydık (örneğin, gliserin veya civa gibi) ve daha sonra yoğun olan bu sıvının üzerine su ekleyip kritik seviyenin üzerine çıkmış olsaydık ne olurdu? Suyun ağırlığı kendisinden daha yoğun olan sıvıyı ortadaki kolonun içine itecek kuvvete sahip olmadığı için, sifon mekanizması çalışmamış olurdu ve bu nedenle su ortadaki delikten dökülmezdi (ancak sudan daha yoğun sıvıların sağlığımıza zarar verme ihtimaline karşın bu önerilmez).

Seramik sanatçıları, çalışma stillerine göre Pisagor'un Adalet Kupası'nın formunu, çömlekçi çarkında (torna) elle şekillendirip, iki ya da üç ayrı formu birleştirerek ve kupanın içindeki kanal ve deliklere ciddi bir özen göstererek oluştururlar. Hatta bu kıymetli çalışmanın bir simitle (torus) aynı topolojik yapıda olduğunu da bizzat hissedebilirler. Pisagor'un Adalet Kupası, seramik sanatı ile fiziğin birleştiği ortak bir sanat eseridir. Bu kupalar Pisagor'un memleketi Samos Adası'nda turizmde hediyelik eşya ya da kullanım amaçlı olarak vitrinlerde ve raflarda sergilenmektedir.

Teşekkür

Makalenin daha iyi hale gelebilmesi için değerli tartışma ve önerilerde bulunan UNSW Australia, Faculty of Science, Department of Theoretical Physics araştırmacılarından Sayın Celal HARABATİ' ye en içten teşekkürlerimizi sunarız.

Klein şişesi ve Pisagor'un Adalet Kupası'nı yaparak çalışmamıza destek olan ve bizleri sevindiren, Lapseki/Çanakkale'nin nadide seramik sanatçılarından Sayın Hülya Öztürk Hanım'a özellikle teşekkürlerimizi sunuyoruz.

Kaynaklar

[1] Parker B., Good Vibrations: The Physics of Music, The Johns Hopkins University Press, 2009 (Türkçe Çeviri: Cenk Güray ve Mahmut Sözer, Güçlü Titreşimler: Müziğin Fiziği, TÜBİTAK, Popüler Bilim Kitapları, Ankara, 2015).

[2] Topdemir, H. G, ve Unat, Y., Bilim Tarihi, 2. Baskı, Pegem Akademi (2009).

[3] Ewbank, T., A Descriptive and Historical Account of Hydraulic and Other Machines for Raising Water, Ancient and Modern, D. Appleton & company, New York (1842).

[4] Tokaty, G. A., A History and Philosophy of Fluid Mechanics, Dover Publications, Inc. (1971).

[5] Fishbane, P.,Gasiorowicz, S., Thornton, S.T., Physics for Scientist and Engineers, Extended Version, Vol. I., 2nd Edition, Prentice Hall, Inc. (1996).